ویژهٔ پایهٔ یازدهم

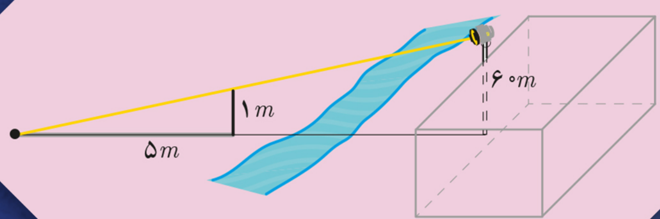
آذر ۱۴۰۴

گزینه دو
مؤسسه آموزشی فرهنگی

# دفترچه پاسخ تشریحی

## ارزشیابی تشریحی مرحله ۱

## ریاضی ۲ (رشته علوم تجربی)




۱۴۰۴-۱۴۰۵

gozine2.ir

گزینه دو
مؤسسه آموزشی فرهنگی

# اسامی هیئت‌علمی ارزشیابی‌های تشریحی مؤسسه گزینه‌دو در سال تحصیلی ۱۴۰۵_۱۴۰۴

- معاون تولید محتوا: **علی الفتی**
- مدیر پروژه ارزشیابی تشریحی: **محمد حسین کشانی**

## گروه ریاضی

مدیرگروه: سید امیرمحمد سید شاکری

طراحان

| | | طراحان | |
|---|---|---|---|
| حسابان و ریاضی پایه | **مسئول درس:** علیرضا فاطمی | حسین شفیع زاده | سید امیرمحمد سید شاکری |
| هندسه | **مسئول درس:** محمد تقی‌پور | سعید اکبرزاده | امیدرضا پورحسینی |
| ریاضیات گسسته | **مسئول درس:** حسین اسدزاده | سعید اکبرزاده | امیرضا پورحسینی |
| ریاضی تجربی | **مسئول درس:** امیرحسین شریفیان | ایمان اردستانی | محمد خان‌گلدی |
| ریاضی انسانی | **مسئول درس:** حسین اسدزاده | سعید اکبرزاده | امیدرضا پورحسینی |

## گروه علوم

مدیرگروه: محمد حسین کشانی

طراحان

| | | طراحان | |
|---|---|---|---|
| زیست شناسی | **مسئول درس:** علی جوهری | منصوره رئیس‌دانا | علی جوهری |
| فیزیک | **مسئول درس:** علی کنی | احمد رضوانی | یوسف صباغی |
| شیمی | **مسئول درس:** محمد وحیدی | بابک اسفندی | سبحان دقیق |
| زمین شناسی | **مسئول درس:** شکیبا کریمی | حسن علی‌محمدی | |

gozine2.ir

گزینه‌دو
مؤسسه آموزشی فرهنگی

# اسامی هیئت‌علمی ارزشیابی‌های تشریحی مؤسسه گزینه‌دو در سال تحصیلی ۱۴۰۵_۱۴۰۴

- معاون تولید محتوا: **علی الفتی**
- مدیر پروژه ارزشیابی تشریحی: **محمد حسین کشانی**

## گروه عمومی

مدیر گروه: علی اکبر آخوندی

| | | طراحان |
|---|---|---|
| ادبیات فارسی | **مسئول درس:** محسن ابراهیم‌تهرانی | افشین محی الدین |
| دین و زندگی | **مسئول درس:** زهرا محمدی | علی‌اکبر آخوندی، زهرا محمدی |
| زبان انگلیسی | **مسئول درس:** سعید ابراهیمی | علی عاشوری، سعید ابراهیمی |

## گروه انسانی

مدیر گروه: علی اکبر آخوندی

| | | طراحان |
|---|---|---|
| علوم و فنون ادبی | **مسئول درس:** فاطمه اکران | گلاویژ جلالی، مهراوه مجتهد |
| جامعه شناسی | **مسئول درس:** الهام رضایی<br>**دستیار:** فاطمه صفری | فروغ تیموریان، آزیتا بیدقی |
| روان شناسی | **مسئولین درس:** سیده ضحی سکاکی و حسین اصفهانی | سیده ضحی سکاکی |
| زبان عربی | **مسئولین درس:** پویا رضاداد، مائده خدایاری<br>**دستیار:** سارا حمزه | عمار تاجبخش، محسن احدی، کیارش پورمهدی، جواهر فرحات |
| تاریخ | **مسئول درس:** الناز گنج‌کار<br>**دستیار:** الهه ریاحی‌نسب | مهسا اصغری، وجیهه صادقی |
| جغرافیا | **مسئول درس:** وجیهه صادقی | بهروز یحیی، مهسا اصغری |
| فلسفه و منطق | **مسئول درس:** نگین تربتی | اکرم یاسری، فاطمه شریف زاده |

۱- (بارم کل: ۲ نمره)

الف) ۱ (۰/۵)

نکته: مختصات نقطهٔ وسط پاره‌خط AB، برابر با $M(\frac{x_A+x_B}{۲},\frac{y_A+y_B}{۲})$ است.

نکته: فاصلهٔ دو نقطهٔ $A(x_A,y_A)$ و $B(x_B,y_B)$، برابر با $AB=\sqrt{(x_A-x_B)^۲+(y_A-y_B)^۲}$ است.

ابتدا مختصات وسط AB را پیدا می‌کنیم:

$$M(\frac{۲+۰}{۲},\frac{۱+(-۱)}{۲})=(۱,۰)$$

اکنون فاصلهٔ نقطهٔ $M(۱,۰)$ را از مبدأ مختصات $O(۰,۰)$ محاسبه می‌کنیم:

$$OM=\sqrt{(۱-۰)^۲+(۰-۰)^۲}=۱$$

ب) ۲ (۰/۵)

اگر a و c هم‌علامت نباشند، داریم:

$$\begin{cases}ac<۰ \Rightarrow -۴ac>۰\\ b^۲\geq ۰\end{cases} \Rightarrow b^۲-۴ac>۰ \Rightarrow \Delta>۰$$

بنابراین معادله دارای دو ریشهٔ حقیقی می‌باشد.

پ) دایره (۰/۵)

نکته: مجموعهٔ نقاطی از صفحه که از نقطهٔ ثابت O، به فاصلهٔ ثابت r هستند، تشکیل یک دایره به مرکز O و شعاع r می‌دهند.

ت) استقرایی (۰/۵)

نکته: استدلالی که در آن با مشاهده و بررسی یک موضوع در چند حالت، نتیجه‌ای کلی از آن گرفته می‌شود؛ یعنی «از جزء به کل می‌رسیم»، استدلال استقرایی نامیده می‌شود.

۲- (بارم کل: ۲ نمره)

الف) نادرست (۰/۵)

نکته: معادلهٔ خطی با شیب m و عرض از مبدأ h، به‌صورت $y=mx+h$ است.

نکته: شرط موازی بودن دو خط، این است که شیب‌های برابر داشته باشند.

شیب خط اول برابر $\frac{۲}{۳}$ است و اگر معادلهٔ خط دوم را مرتب کنیم، به‌صورت $y=-\frac{۳}{۲}x+\frac{۱}{۲}$ درمی‌آید که نشان می‌دهد شیب آن برابر $-\frac{۳}{۲}$ می‌باشد. چون شیب دو خط برابر نیستند، پس موازی نمی‌باشند.

ب) درست (۰/۵)

نکته: در سهمی به معادلهٔ $y=ax^۲+bx+c$، مختصات رأس سهمی به‌صورت $(-\frac{b}{۲a},-\frac{\Delta}{۴a})$ است.

با توجه به نکتهٔ فوق، داریم:

$$x_S=-\frac{b}{۲a}=-\frac{۲}{۲\times ۱}=-۱ \Rightarrow y_S=(-۱)^۲+۲(-۱)-۱=-۲$$

بنابراین مختصات رأس سهمی به‌صورت $S(-۱,-۲)$ می‌باشد که در ناحیهٔ سوم واقع است.

پ) درست (۰/۵)

از آن‌جا که عبارت زیر رادیکال نمی‌تواند منفی باشد، داریم:

$$x-۱\geq ۰ \Rightarrow x\geq ۱ \Rightarrow ۲x\geq ۲$$

$$\begin{cases}۲x\geq ۲\\ \sqrt{x-۱}\geq ۰\end{cases} \Rightarrow ۲x+\sqrt{x-۱}\geq ۲$$

بنابراین $۲x+\sqrt{x-۱}$ نمی‌تواند برابر صفر باشد و معادلهٔ داده‌شده، فاقد ریشهٔ حقیقی است.

ت) درست (۰/۵)

نکته: قضیه‌هایی که هم خود آن‌ها و هم عکس آن‌ها درست هستند را قضیه‌های دوشرطی می‌نامیم. قضیه‌های دوشرطی را با نماد «$\Leftrightarrow$» (اگر و تنها اگر) نمایش می‌دهیم.

۳- (بارم کل: ۲ نمره)

الف) گزینهٔ ۴ (۰/۵)

نکته: مختصات نقطهٔ وسط پاره‌خط AB، برابر با $M(\frac{x_A+x_B}{۲},\frac{y_A+y_B}{۲})$ است.

نقطهٔ B وسط نقاط A و $A'$ است، بنابراین داریم:

$$\begin{cases} \frac{a+۳}{۲}=۱ \Rightarrow a=-۱ \\ \frac{b+(-۱)}{۲}=۲ \Rightarrow b=۵ \end{cases} \Rightarrow a+b=۴$$

ب) گزینهٔ ۲ (۰/۵)

نکته: در سهمی به معادلهٔ $y=ax^۲+bx+c$:

الف) اگر $a>۰$، دهانهٔ سهمی رو به بالاست و به‌ازای $x=-\frac{b}{۲a}$، کمترین (مینیمم) مقدار تابع درجهٔ دوم موردنظر به‌دست می‌آید.

ب) اگر $a<۰$، دهانهٔ سهمی رو به پایین است و به‌ازای $x=-\frac{b}{۲a}$، بیشترین (ماکزیمم) مقدار تابع درجهٔ دوم موردنظر به‌دست می‌آید.

نکته: در سهمی به معادلهٔ $y=ax^۲+bx+c$، عدد ثابت c، نشان‌دهندهٔ محل برخورد نمودار آن با محور عرض‌هاست.

چون $a<۰$ است، پس دهانهٔ سهمی رو به پایین است. چون $b>۰$ است، پس $-\frac{b}{۲a}>۰$ بوده و بنابراین طول رأس سهمی مقداری مثبت است. چون $c<۰$ است، پس محل تلاقی سهمی با محور عرض‌ها پایین‌تر از مبدأ مختصات می‌باشد.

پ) گزینهٔ ۱ (۰/۵)

نکته: مستطیل طلایی، مستطیلی است که نسبت مجموع طول و عرض آن به طول مستطیل، برابر با نسبت طول به عرض آن باشد. به عبارت دیگر، اگر طول و عرض مستطیل به‌ترتیب x و y باشند، داشته باشیم $\frac{x}{y}=\frac{x+y}{x}$. نسبت طول به عرض این مستطیل را نسبت طلایی گوییم.

نکته: عدد $\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$ به عدد طلایی معروف است که مقدار تقریبی آن ۱/۶۱۸ می‌باشد.

از آنجا که طول مستطیل طلایی برابر $\frac{\sqrt{۵}+۱}{۲}$ است، پس عرض آن برابر ۱ بوده و بنابراین مساحت آن برابر است با:

$$\frac{\sqrt{۵}+۱}{۲}\times ۱=\frac{\sqrt{۵}+۱}{۲}$$

ت) گزینهٔ ۲ (۰/۵)

نکته: هر نقطه که روی عمودمنصف یک پاره‌خط باشد، از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله است و هر نقطه که از دو سر یک پاره‌خط به یک فاصله باشد، روی عمودمنصف آن پاره‌خط قرار دارد.

با توجه به نکتهٔ فوق، محل برخورد عمودمنصف‌های AB و CD جواب مسئله است.

۴- (بارم کل: ۲ نمره)

نکته: شیب خطی که از دو نقطهٔ $A(x_۱,y_۱)$ و $B(x_۲,y_۲)$ می‌گذرد، برابر است با: $m=\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}$

نکته: دو خطِ غیرموازی با محورهای مختصات بر هم عمودند، هرگاه حاصل‌ضرب شیب‌های آن‌ها برابر (۱-) باشد؛ یعنی اگر شیب‌های دو خط m و $m'$ باشد، آنگاه شرط عمود بودن آن‌ها آن است که $mm'=-۱$؛ به عبارت دیگر شیب هر کدام، قرینهٔ معکوس شیب دیگری باشد.

نکته: معادلهٔ خطی با شیب m و عرض از مبدأ h، به‌صورت $y=mx+h$ است.

نکته: معادلهٔ خطی با شیب m که از نقطهٔ $(x_۰,y_۰)$ عبور می‌کند، به‌صورت $y-y_۰=m(x-x_۰)$ می‌باشد.

$$\text{شیب خط } d: m_۱=\underbrace{\frac{b-a}{a-b}}_{(۰/۲۵)}=-۱ \quad (۰/۲۵)$$

$$\text{شیب خط } \ell: m_۲=\frac{-۱}{m_۱}=۱ \quad (۰/۵)$$

$$\text{معادلهٔ خط } \ell: \underbrace{y=۱\times x+h}_{(۰/۵)} \xrightarrow{(۲,-۳)} -۳=۱\times ۲+h \Rightarrow \underbrace{h=-۵}_{(۰/۲۵)} \Rightarrow y=x-۵ \quad (۰/۲۵)$$

برای نوشتن معادلهٔ خط $\ell$ می‌توان به‌صورت زیر نیز عمل کرد:

$$\underbrace{y-(-۳)=۱\times(x-۲)}_{(۰/۵)} \Rightarrow y=x-۵ \quad (۰/۵)$$

۵- (بارم کل: ۲ نمره)

راه‌حل اول:

نکته: فاصلهٔ نقطهٔ $A(x_0,y_0)$ از خط به معادلهٔ $ax+by+c=0$، برابر است با:

$$d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

نقطهٔ $A(0,\frac{1}{2})$ بر خط $2x+6y=3$ قرار دارد. با توجه به اینکه دو خط داده‌شده موازی هستند $(m_1=m_2=-\frac{1}{3})$، فاصلهٔ نقطهٔ A از خط $x+3y-1=0$ طول ضلع مربع می‌باشد. (۰/۵)

$$AH=\underbrace{\frac{|1\times 0+3\times\frac{1}{2}-1|}{\sqrt{1^2+3^2}}}_{(0/5)}=\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{10}}=\frac{1}{2\sqrt{10}}\quad(0/5)$$

$$S=AH^2=(\frac{1}{2\sqrt{10}})^2=\frac{1}{40}\quad(0/5)$$

(اگر دانش‌آموز به‌جای نقطهٔ A نقطهٔ دیگری بر روی هر یک از خطوط در نظر گرفته و فاصلهٔ آن را از خط دیگر به‌درستی محاسبه کرده باشد، نمرهٔ کامل لحاظ شود.)

راه‌حل دوم:

نکته: فاصلهٔ دو خط موازی به معادلات $ax+by+c=0$ و $ax+by+c'=0$، از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$d=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

خطوط داده‌شده موازی هستند $(m_1=m_2=-\frac{1}{3})$. بنابراین طول ضلع مربع برابر فاصلهٔ این دو خط است (۰/۵). معادلهٔ خط دوم را بر ۲ تقسیم می‌کنیم تا ضرایب آن مشابه ضرایب معادلهٔ خط اول شود. سپس با توجه به نکتهٔ فوق، فاصلهٔ دو خط $x+3y-1=0$ و $x+3y-\frac{3}{2}=0$ برابر است با:

$$d=\underbrace{\frac{|-1-(-\frac{3}{2})|}{\sqrt{1^2+3^2}}}_{(0/5)}=\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{10}}=\frac{1}{2\sqrt{10}}\quad(0/5)$$

$$S=d^2=(\frac{1}{2\sqrt{10}})^2=\frac{1}{40}\quad(0/5)$$

تذکر: به دانش‌آموزان توصیه می‌شود در آزمون‌های تشریحی از راه‌حل اول استفاده کنند و راه‌حل دوم را فقط در آزمون‌های تستی به‌کار برند.

۶- (بارم کل: ۲ نمره)

نکته: اگر $\alpha$ و $\beta$ ریشه‌های معادلهٔ $ax^2+bx+c=0\ ,\ (a\neq 0)$ باشند، آنگاه:

$$\alpha+\beta=S=-\frac{b}{a}\ ,\ \alpha\cdot\beta=P=\frac{c}{a}$$

با توجه به نکتهٔ فوق، داریم:

$$\begin{cases}\text{مجموع ریشه‌ها}: S=-\frac{-(a^2-2)}{1}=a^2-2\quad(0/5)\\ \text{حاصل‌ضرب ریشه‌ها}: P=\frac{-a}{1}=-a\quad(0/5)\end{cases}\Rightarrow a^2-2=-a\Rightarrow a^2+a-2=0$$

$$\Rightarrow (a+2)(a-1)=0\Rightarrow\begin{cases}a+2=0\Rightarrow \underbrace{a=-2}_{(0/25)}\Rightarrow x^2-2x+2=0\ \text{غ‌ق‌ق (ریشهٔ حقیقی ندارد)}\quad(0/25)\\ a-1=0\Rightarrow \underbrace{a=1}_{(0/25)}\Rightarrow x^2+x-1=0\ \checkmark\quad(0/25)\end{cases}$$

۷- (بارم کل: ۲ نمره)

نکته: اگر $\alpha$ و $\beta$، صفرهای یک تابع درجهٔ دوم باشند، آنگاه ضابطهٔ آن به‌صورت $y=a(x-\alpha)(x-\beta)$ خواهد بود.

نکته: در سهمی به معادلهٔ $y=ax^{۲}+bx+c$، مختصات رأس سهمی به‌صورت $(-\frac{b}{۲a},-\frac{\Delta}{۴a})$ است.

راه‌حل اول:

$$\underbrace{y=a(x-۱)(x-۵)}_{(۰/۵)} \xrightarrow{(۰,-۱)} -۱=a(-۱)(-۵) \Rightarrow a=-\frac{۱}{۵}\ (۰/۲۵)$$

بنابراین ضابطهٔ سهمی به‌صورت زیر خواهد بود:

$$y=-\frac{۱}{۵}(x^{۲}-۶x+۵) \text{ یا } y=-\frac{۱}{۵}x^{۲}+\frac{۶}{۵}x-۱\ (۰/۵)$$

و داریم:

$$x_S=۳ \Rightarrow y_S=-\frac{۱}{۵}(۹-۱۸+۵)=\frac{۴}{۵}\ (۰/۲۵)$$

یا

$$y_S=-\frac{\Delta}{۴a}=-\frac{(\frac{۶}{۵})^{۲}-۴(-\frac{۱}{۵})(-۱)}{۴(-\frac{۱}{۵})}=\frac{۴}{۵}$$

پس بیشترین مقدار سهمی برابر $\frac{۴}{۵}$ است. (۰/۵)

راه‌حل دوم:

اگر ضابطهٔ سهمی را به‌صورت $f(x)=ax^{۲}+bx+c$ در نظر بگیریم، با توجه به نمودار داده‌شده داریم:

$$\begin{cases} f(۰)=-۱ \Rightarrow a\times ۰^{۲}+b\times ۰+c=-۱ \Rightarrow c=-۱ \\ f(۱)=۰ \Rightarrow a\times ۱^{۲}+b\times ۱+c=۰ \Rightarrow a+b+c=۰ \qquad (۰/۵) \\ f(۵)=۰ \Rightarrow a\times ۵^{۲}+b\times ۵+c=۰ \Rightarrow ۲۵a+۵b+c=۰ \end{cases}$$

از حل دستگاه سه معادله سه مجهول فوق خواهیم داشت:

$$a=-\frac{۱}{۵}\ ,\ b=\frac{۶}{۵}\ ,\ c=-۱\ (۰/۲۵)$$

بنابراین ضابطهٔ سهمی به‌صورت زیر خواهد بود:

$$y=-\frac{۱}{۵}x^{۲}+\frac{۶}{۵}x-۱\ (۰/۵)$$

و داریم:

$$x_S=-\frac{\frac{۶}{۵}}{۲(-\frac{۱}{۵})}=۳ \Rightarrow y_S=-\frac{۱}{۵}\times ۳^{۲}+\frac{۶}{۵}\times ۳-۱=\frac{۴}{۵}\ (۰/۲۵)$$

یا

$$y_S=-\frac{\Delta}{۴a}=-\frac{(\frac{۶}{۵})^{۲}-۴(-\frac{۱}{۵})(-۱)}{۴(-\frac{۱}{۵})}=\frac{۴}{۵}$$

پس بیشترین مقدار سهمی برابر $\frac{۴}{۵}$ است. (۰/۵)

۸- (بارم کل: ۲ نمره)

نکته: برای حل یک معادلهٔ رادیکالی، می‌توان با به توان رساندن طرفین معادله و در صورت لزوم با تکرار این عمل، معادله را از شکل رادیکالی خارج کرد. پس از حل معادله باید مطمئن شویم که جواب‌های حاصل در معادلهٔ اولیه صدق می‌کنند.

راه‌حل اول:

طرفین معادله را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$x-\frac{۵}{۲}+x+\frac{۵}{۲}+۲\sqrt{(x-\frac{۵}{۲})(x+\frac{۵}{۲})}=۲۵ \Rightarrow ۲x+۲\sqrt{x^{۲}-\frac{۲۵}{۴}}=۲۵ \Rightarrow \underbrace{۲\sqrt{x^{۲}-\frac{۲۵}{۴}}=۲۵-۲x}_{(۰/۵)}$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} ۴(x^{۲}-\frac{۲۵}{۴})=۶۲۵+۴x^{۲}-۱۰۰x \Rightarrow ۴x^{۲}-۲۵=۶۲۵+۴x^{۲}-۱۰۰x \Rightarrow \underbrace{۱۰۰x=۶۵۰}_{(۰/۵)} \Rightarrow x=۶/۵\ (۰/۵)$$

چون جواب به‌دست آمده عبارت زیر هیچ‌یک از رادیکال‌ها را منفی نمی‌کند (یا چون جواب به‌دست آمده در معادلهٔ اصلی صدق می‌کند)، پس قابل قبول است. (۰/۵)

راه‌حل دوم:

معادله را به‌صورت زیر مرتب می‌کنیم:

$$\sqrt{x-\frac{5}{2}}=5-\sqrt{x+\frac{5}{2}} \xrightarrow{\text{توان ۲}} x-\frac{5}{2}=(5-\sqrt{x+\frac{5}{2}})^2 \Rightarrow x-\frac{5}{2}=25-10\sqrt{x+\frac{5}{2}}+x+\frac{5}{2} \Rightarrow 10\sqrt{x+\frac{5}{2}}=30$$

$$\Rightarrow \underbrace{\sqrt{x+\frac{5}{2}}=3}_{(0/5)} \xrightarrow{\text{توان ۲}} \underbrace{x+\frac{5}{2}=9}_{(0/5)} \Rightarrow x=\frac{13}{2}=6/5 \ (0/5)$$

چون جواب به‌دست آمده عبارت زیر هیچ‌یک از رادیکال‌ها را منفی نمی‌کند (یا چون جواب به‌دست آمده در معادلهٔ اصلی صدق می‌کند)، پس قابل قبول است. (۰/۵)

راه‌حل سوم:

معادله را به‌صورت زیر مرتب می‌کنیم:

$$\sqrt{x+\frac{5}{2}}=5-\sqrt{x-\frac{5}{2}} \xrightarrow{\text{توان ۲}} x+\frac{5}{2}=(5-\sqrt{x-\frac{5}{2}})^2 \Rightarrow x+\frac{5}{2}=25-10\sqrt{x-\frac{5}{2}}+x-\frac{5}{2} \Rightarrow 10\sqrt{x-\frac{5}{2}}=20$$

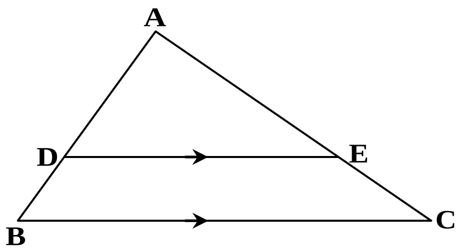
$$\Rightarrow \underbrace{\sqrt{x-\frac{5}{2}}=2}_{(0/5)} \xrightarrow{\text{توان ۲}} \underbrace{x-\frac{5}{2}=4}_{(0/5)} \Rightarrow x=\frac{13}{2}=6/5 \ (0/5)$$

چون جواب به‌دست آمده عبارت زیر هیچ‌یک از رادیکال‌ها را منفی نمی‌کند (یا چون جواب به‌دست آمده در معادلهٔ اصلی صدق می‌کند)، پس قابل قبول است. (۰/۵)

۹- (بارم کل: ۲ نمره)

نکته (قضیهٔ تالس و تعمیم آن):

اگر در شکل مقابل پاره‌خط DE موازی ضلع BC باشد. آنگاه:




$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$ :تالس (جزء به جزء)

$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$ :تعمیم تالس (جزء به کل)

با توجه به تعمیم قضیهٔ تالس، داریم:

$$EF \parallel MN \Rightarrow \frac{AE}{AM}=\frac{EF}{MN} \Rightarrow \underbrace{\frac{2}{x+2}=\frac{3}{2x+1}}_{(0/5)} \Rightarrow 4x+2=3x+6 \Rightarrow x=4 \ (0/5)$$

$$MN \parallel BC \Rightarrow \frac{AM}{AB}=\frac{MN}{BC} \Rightarrow \underbrace{\frac{x+2}{x+2+y}=\frac{2x+1}{6y}}_{(0/5)} \xrightarrow{x=4} \frac{6}{6+y}=\frac{9}{6y} \Rightarrow 36y=9(6+y) \Rightarrow 4y=6+y$$

$$\Rightarrow 3y=6 \Rightarrow y=2 \ (0/5)$$

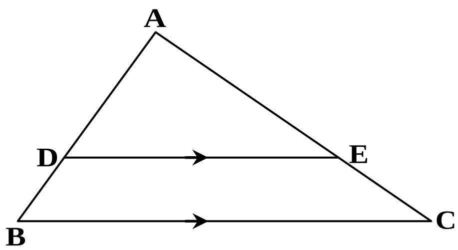
۱۰- (بارم کل: ۲ نمره)

نکته: (با فرض اینکه تمام مخرج‌ها مخالف صفرند.)

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d} & \text{(ترکیب نسبت در صورت)} \\ \frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+d} & \text{(ترکیب نسبت در مخرج)} \end{cases}$$

نکته (قضیهٔ تالس و تعمیم آن):

اگر در شکل مقابل پاره‌خط DE موازی ضلع BC باشد. آنگاه:




$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$ :تالس (جزء به جزء)

$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$ :تعمیم تالس (جزء به کل)

با توجه به نکتهٔ فوق، می‌توان نوشت:

$$\frac{AE}{DE}=\frac{۳}{۲} \Rightarrow \frac{AE}{AE+DE}=\frac{۳}{۳+۲} \Rightarrow \frac{AE}{AD}=\frac{۳}{۵} \quad (۱)$$

$$\frac{DE}{AE}=\frac{۲}{۳} \Rightarrow \frac{DE}{DE+AE}=\frac{۲}{۳+۲}=\frac{۲}{۵} \quad (۲)$$

اکنون با توجه به تعمیم قضیهٔ تالس، داریم:

$$A\overset{\triangle}{C}D : EQ \parallel CD \Rightarrow \underbrace{\frac{EQ}{CD}=\frac{AE}{AD}}_{(۰/۵)} \xrightarrow{(۱)} \frac{EQ}{۵}=\frac{۳}{۵} \Rightarrow EQ=۳ \quad (۰/۲۵)$$

$$A\overset{\triangle}{B}D : EP \parallel AB \Rightarrow \underbrace{\frac{EP}{AB}=\frac{DE}{AD}}_{(۰/۵)} \xrightarrow{(۲)} \frac{EP}{۲}=\frac{۲}{۵} \Rightarrow EP=\frac{۴}{۵} \quad (۰/۲۵)$$

بنابراین:

$$PQ=EQ-EP=۳-\frac{۴}{۵}=\frac{۱۱}{۵}=۲/۲ \quad (۰/۵)$$